

---

# REDUCCIÓN ESTRATÉGICA DE HORARIOS DE SERVICIO EN SISTEMAS DE TRANSPORTE PÚBLICO BASADA EN MODELOS GEOMÉTRICOS DE LOCALIZACIÓN DISCRETA

Francisco A. Ortega Riejos

Departamento de Matemática Aplicada I. Escuela Técnica Superior de Arquitectura. Universidad de Sevilla. Avenida de la Reina Mercedes, 2. 41012-SEVILLA. ESPAÑA.

E-mail: [riejos@us.es](mailto:riejos@us.es).

Juan Antonio Mesa López-Colmenar

Departamento de Matemática Aplicada II. E. T. S. de Ingenieros. Universidad de Sevilla.

E-mail: [jmesa@us.es](mailto:jmesa@us.es).

Miguel Ángel Pozo Montaña

Departamento de Matemática Aplicada I. E. T. S. de Arquitectura. Universidad de Sevilla.

E-mail: [miguelpozo@us.es](mailto:miguelpozo@us.es).

## RESUMEN

Los sistemas ferroviarios en los entornos metropolitanos soportan a diario una alta densidad de tráfico, heterogéneamente distribuida y muy expuesta a las consecuencias negativas de las interrupciones en el servicio. Disponer de un protocolo de actuación ante eventualidades que puedan afectar a la operatividad del sistema, evitando así la propagación de la perturbación y minimizando sus consecuencias, es un tema de interés reconocido en la literatura al respecto.

El objetivo de este trabajo es asesorar la decisión de reprogramar el servicio, reduciendo la oferta horaria que opera habitualmente en una línea ferroviaria, para atender la incidencia/emergencia que ocurra en otra línea explotada por el mismo operador de transporte público. En este trabajo se desarrolla una metodología basada en la representación geométrica de soluciones que favorezca el empleo de técnicas de optimización propias del campo de la localización discreta.

*Palabras clave: Gestión de incidencias en líneas de transporte; Reprogramación de horarios; Localización Discreta*

## ABSTRACT

Railway systems in metropolitan areas carries a high density of traffic daily, heterogeneously distributed, and exposed to the negative consequences derived from service disruptions. An interesting topic in the Literature is obtaining performance protocols in the presence of contingencies which can affect the system operativity, avoiding the propagation of perturbation and minimising its consequences. The objective of this paper is to assess the decision of rescheduling the train service, reducing the current supply along one transportation line in order to reinforce the service of another line, exploited by the same public operator, which has suffered an incidence or emergency. A methodology, based on a geometric representation of solutions which allows the use of optimisation techniques of Discrete Location, is developed in order to attend to the underlying demand with efficiency criteria in this context of unexpected incidences.

*Key words: Disturbance management; Railway Scheduling; Discrete Location*

## 1. INTRODUCCIÓN

La planificación inicial de sistemas de transporte público incluye decisiones relativas al diseño de líneas y de frecuencias de servicio, que procuran un equilibrio oferta-demanda en un contexto determinista y con un horizonte temporal a medio-largo plazo. Las rupturas puntuales en la operatividad del sistema no suelen ser contempladas en esta etapa inicial, por lo que un sistema, aún correctamente diseñado, puede quedar fuera de servicio por incidencias imprevistas, como accidentes, o previsibles, como puntas de demanda ante eventos multitudinarios.

Para reducir el efecto perturbador de estos desequilibrios, los operadores del servicio de transporte de pasajeros deben tener la capacidad de aplicar algún tipo de estrategia de control para adaptar los horarios a las condiciones del tráfico en tiempo real. Entre las estrategias más frecuentemente usadas para este propósito por los operadores de transporte están el servicio expreso (saltando estaciones con poco flujo de pasajeros), los viajes de retorno sin servicio o *deadheading*, los ciclos cortos o *short-turn* (O'Dell y Wilson, 1999) y el control combinado de acciones (Eberlein *et al.* 1999, Tirachini *et al.* 2007; Pozo *et al.* 2008). Estas medidas se enmarcan en el ámbito de actuación del operador para una línea específica de transporte. Por otro lado, si la incidencia ocurre en otra línea gestionada por el mismo operador, éste puede optar por redistribuir su flota de vehículos, reduciendo los efectivos de la que funciona con normalidad para ayudar al restablecimiento de la operatividad de la línea afectada con un refuerzo adicional de material móvil. Una primera revisión de modelos para la reprogramación de horarios de tráfico ferroviario puede encontrarse en Cordeau *et al.* (1998) y otra, más reciente y orientada a gestionar incidencias, en Törnquist (2007).

Implementar una redistribución del servicio a lo largo de una línea debe llevarse a cabo, por parte del operador, dentro de las opciones del espacio discreto de factibilidad de ventanas temporales que tiene establecido el gestor de infraestructuras ferroviarias, procurando minimizar la pérdida de usuarios, que notarán una alteración en la calidad del servicio que hasta ahora venían recibiendo.

## 2. UN MODELO GEOMÉTRICO DE REPRESENTACIÓN DE HORARIOS

### 2.1. Representación gráfica basada en poligonales

El trazado de una línea ferroviaria puede asumirse abstractamente como una secuencia continua y suave de secciones (también llamados cantones), en las que como máximo sólo un tren puede recorrerlas a un tiempo por medidas de seguridad. Un sistema de señalización bloquea la entrada de un tren potencialmente invasor del segmento que está siendo usado por otro tren. Los tramos ferroviarios pueden constar de un sólo cantón o de varios en paralelo para favorecer la fluidez de tráfico. Las estaciones pueden considerarse esquemáticamente como tramos de múltiples cantones donde suben y bajan los viajeros. En la Figura 1 se puede apreciar un fragmento de línea ferroviaria que conecta dos estaciones A y C, distinguiendo seis tramos en su recorrido.

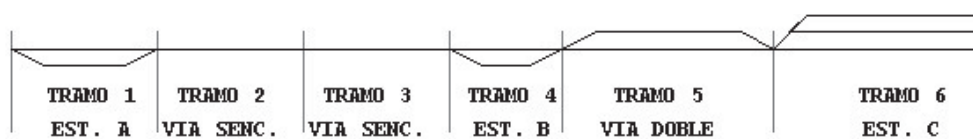
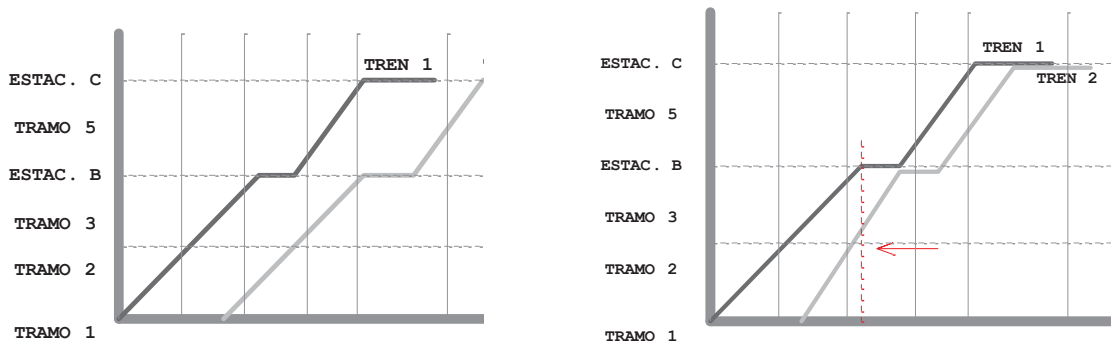


Figura 1. Tramos diferenciados en una línea ferroviaria

Consistentemente con el esquema anterior, los diagramas de operación de trenes (horarios) suelen representarse mediante líneas poligonales sobre un diagrama tiempo-distancia, donde el tiempo es continuo a lo largo del eje OX y la distancia recorrida por el tren en cada cantón, que no corresponda a estaciones, establece una subdivisión del eje OY, de tal forma que la inclinación de la poligonal corresponda con la velocidad comercial del tren (entre dos estaciones con parada) y el tiempo de estacionamiento en un apeadero pueda visualizarse como un segmento horizontal de la poligonal que representa al horario. El formato estandarizado de estos diagramas corresponde a planillas que indican las horas del día de servicio, en el eje de abscisas, frente al kilometraje (ascendente o descendente, según el sentido de la marcha) en el eje de ordenadas. El control del tráfico puede realizarse sobre la base de esta información gráfica, de forma manual o automática con la ayuda de herramientas informáticas específicas como, por ejemplo, el simulador comercial OPENTRACK (<http://www.opentrack.ch/>) o el sistema informático para la planificación del tráfico ferroviario MOM (<http://users.dsic.upv.es/grupos/gps/MOM/>), utilizado por el Administrador de Infraestructuras Ferroviarias (ADIF) de España.

La seguridad del tráfico ferroviario se basa en una interpretación correcta de la geometría subyacente de estos diagramas. Por ejemplo, en la Figura 2 se han representado dos horarios de servicio de tren entre las estaciones A y C de la línea ferroviaria mostrada en la Figura 1. Los horarios del diagrama de la izquierda no presentan conflictos, mientras que los de la figura de la derecha colisionan en el tramo 2 de vía sencilla: el tren 2 irrumpe en el tramo 2 antes de que lo abandone el tren 1.



**Figura 2. Dos horarios de trenes sobre la infraestructura de la Figura 1**

Una línea ferroviaria de gran densidad de tránsito derivará en una madeja laberíntica de poligonales, cada una de las cuales corresponderá al horario de operación de un tren, dificultando la evaluación no automatizada de la factibilidad de las posibles opciones. Para establecer un modelo geométrico de representación de horarios donde la complejidad formal se pueda secuenciar mapa a mapa, se adoptarán las siguientes hipótesis en pro de una mejor comprensión de las ideas:

H1. Todos los trenes circulan por el mismo corredor ferroviario en una misma dirección y con velocidad comercial constante en todo el recorrido.

H2. Existe un lapso temporal común ( $h$ ) que cuantifica el tiempo que requieren todas las tareas secuenciadas del servicio.

H3. El tiempo invertido en recorrer sin detenerse cada tramo (pasando al siguiente, si no se trata del último) es  $h$ .

H4. El tiempo mínimo requerido para la bajada y el embarque de pasajeros en un tren que llega a un tramo-estación es también  $h$ .

H5. El margen temporal de seguridad entre cada par de trenes consecutivos es múltiplo de  $h$ . Las hipótesis anteriores se pueden relajar en la búsqueda de un contexto más general, sin que la validez de lo que sigue a continuación se cuestione.

## 2.2. Representación gráfica basada en puntos

El gestor de infraestructuras ferroviarias suele establecer un esquema de ventanas temporales para que el operador ferroviario localice las diversas tareas que comporta el movimiento de trenes y pasajeros. Asumiendo la unidad canónica  $h$ , el mapa temporal de inicio (eje X) y final (eje Y) de actividad para una estación  $k$  se podrá asociar a una malla homogénea de cuadrados de longitud  $h$ . Las coordenadas de los vértices de las cuadrículas en dicho diagrama temporal significarán, respectivamente, la hora de inicio de la operación y la hora de finalización. Una recta paralela a la bisectriz, situada a la altura  $h$ , representará el tiempo mínimo requerido para acceder al tramo  $(k+1)$ -ésimo desde el anterior  $k$ -ésimo tramo.



Figura 3. Tres trenes a su paso por la estación  $k$

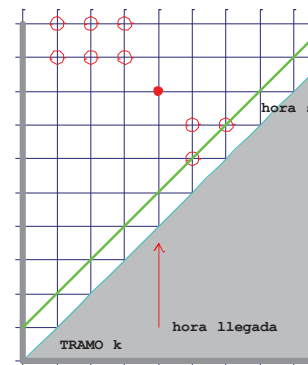


Figura 4. Puntos-horario candidatos sólo si hay multiplicidad de vías

El diagrama de la Figura 3 se asocia con el mapa operativo en una estación genérica  $k$ . El tiempo de llegada de los trenes se observa en el eje de abscisas, mientras que la hora de salida de los trenes corresponde al eje de ordenadas. Cada tren tiene asignado un punto (punto-horario, en lo que sigue) cuyas coordenadas necesariamente lo sitúan en el triángulo superior del primer cuadrante por encima de la recta  $y=x+h$  (trazada en color verde). En dicha figura se aprecian además los datos correspondientes a tres trenes: el primero invierte un tiempo  $2h$  en carga y descarga de pasajeros, el tren número 2 emplea el tiempo mínimo  $h$  para esa misma operación y, finalmente, el tren número 3 no para en la estación  $k$ , de ahí su localización en la diagonal desplazada del primer cuadrante.

En la Figura 4 se observa un punto-horario (punto relleno). Ningún otro punto-horario podrá localizarse en la misma fila o la misma columna (según H2). Situándonos sobre dicho punto, los cuadrantes primero y tercero serán zonas de libre localización para otros puntos-horarios factibles, mientras que en los cuadrantes segundo y cuarto, el número de puntos-horarios factibles (puntos huecos) estará limitado superiormente por el número de vías que disponga el tramo considerado; además, en el caso del cuarto cuadrante, sólo se podrían considerar factibles los del triángulo que resulta de proyectar el punto-horario sobre la primera sub-diagonal superior.

La secuencia de estaciones (con parada o no) de la línea ferroviaria corresponderá con una sucesión de diagramas temporales llegada-salida. Como se muestra en la Figura 5, cada punto-

horario en el diagrama  $k$ -ésimo tendrá su continuación en alguno de los puntos factibles del segmento vertical que parte de su proyección sobre la diagonal en el mapa temporal  $(k+1)$ -ésimo.

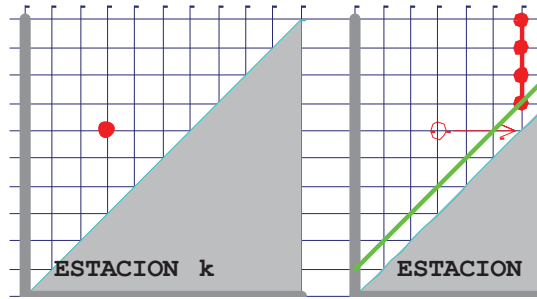


Figura 5. Zona de factibilidad de puntos-horarios entre estaciones consecutivas

### 3. CARACTERÍSTICAS Y ESTIMACIÓN DE POBLACIONES EN LOS PUNTOS-HORARIOS

El  $j$ -ésimo tren, a su paso por el tramo número  $k$ , tendrá asociado un punto-horario de coordenadas  $P_k^{(j)}(ta_k^{(j)}, td_k^{(j)})$  (tiempo acceso, tiempo de partida) donde

- En general:  $td_k^{(j)} \geq ta_k^{(j)} + h; \quad \forall k, \forall j$

- Si  $td_k^{(j)} = ta_k^{(j)} + h$  significa que el tren  $j$  pasa sin parar por el tramo  $k$

- El tiempo de parada para subida/bajada de pasajeros del tren  $j$  en la estación  $k$  es  $td_k^{(j)} - ta_k^{(j)} - h$ .

Asumamos la existencia de un punto-horario de coordenadas  $P_k^{(j)}(ta_k^{(j)}, td_k^{(j)})$ . En ese caso,

- No existirán otros puntos-horarios sobre la misma columna ni la misma fila

- El número de puntos-horarios admisible en el triángulo de proyección de  $P_k^{(j)}$  sobre la bisectriz desplazada en  $h$  estará acotado superiormente por el número de vías disponibles en el tramo correspondiente  $nv_k$ .

Cada punto-horario existente  $P_k^{(j)}$  tendrá asociado tres valores que cuantifican poblaciones de usuarios conocidas:

$A_k^{(j)}$ : número de usuarios que acceden a la estación  $k$  para subir al tren  $j$

$B_k^{(j)}$ : número de usuarios que bajan en la estación  $k$

$R_k^{(j)}$ : número de usuarios que permanecen en el tren  $j$  mientras transita por la estación  $k$ .

#### 3.1. Condición de consistencia en la secuencia de puntos-horarios

Para cada par de puntos-horarios consecutivos  $P_k^{(j)}(ta_k^{(j)}, td_k^{(j)})$  y  $P_{k+1}^{(j)}(ta_{k+1}^{(j)}, td_{k+1}^{(j)})$ , se debe satisfacer que el tiempo de acceso al tramo siguiente coincida con el tiempo de partida del tramo actual, desplazado en  $h$ . Es decir,  $ta_{k+1}^{(j)} = td_k^{(j)} + h; \quad \forall k, \forall j$ .

### 3.2. Estimación de pérdida de usuarios por un incremento del tiempo de viaje

Consideremos que el sistema ferroviario es típicamente metropolitano con estaciones intermodales donde los usuarios prefieren el uso del tren porque perciben una disminución en el tiempo de viaje si se compara con otro medio alternativo. Asumamos que la cautividad del viajero es mínima, en el sentido de que éste dispone de medios de transporte alternativos que se costea con el mismo título de viaje que se usa para el tren. La información sobre los cambios en la programación de horario se facilita *in situ*, debido a que la incidencia causante es repentina e inesperada.

Asumamos estimado del número de viajeros que utilizan la línea L mediante la expresión  $n_{ij}(L) = OD_{ij} f_{ij}(L)$ , donde  $OD_{ij}$  denota el total de usuarios interesados en el viaje entre las zonas asociadas a las estaciones  $i$  y  $j$ , mientras que el otro término es la función *logit* relativa a la ganancia de tiempo de viaje o utilidad (variable  $x$ ) que el usuario percibe frente a otro medio de transporte alternativo a la línea L:

$$f_{ij}(L) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma x(L)}} \quad (\gamma \text{ es un parámetro de calibración}) \quad (1)$$

Consecuentemente con este modelo calibrado de demanda determinista, ganancia o pérdida de viajeros en el modo tren, como consecuencia del fallo, se puede estimar a partir del decremento de la utilidad (o del incremento del tiempo de viaje  $T$ ). Aplicando el desarrollo de Taylor del término *logit* en un entorno del valor cero para la variable  $\Delta T$  se obtiene:

$$\frac{1}{1 + e^{-\gamma(T+\Delta T)}} = \frac{1}{1 + e^{-\gamma T} e^{-\gamma \Delta T}} = \frac{1}{1 + A e^{-\gamma \Delta T}} = \frac{1}{1 + A} + \frac{\gamma A}{(1 + A)^2} \Delta T + \frac{\gamma^2 A(A-1)}{2(1 + A)^2} \Delta T^2 + \dots \quad (2)$$

(donde el término  $A$  es constante y denota  $e^{-\gamma T}$ ).

Usando el valor principal del desarrollo, se puede realizar una estimación de la pérdida de viajeros en la línea L, en función del incremento del tiempo de viaje que experimentan los viajeros:

$$\Delta n_{ij}(L)[T, \Delta T] \approx OD_{ij} \frac{\gamma e^{-\gamma T}}{(1 + e^{-\gamma T})^2} |\Delta T| \quad (3)$$

Dado que el tiempo mínimo de viaje, al paso por el  $k$ -ésimo tramo, es  $T=kh$ , se puede definir, en función del incremento  $x$  del tiempo de viaje, una función lineal creciente en  $x$  (de acuerdo al patrón anterior) que estima el número de viajeros perdidos mediante el producto con el dato aforado:

$$f_k(x) = \frac{\gamma e^{-\gamma kh}}{(1 + e^{-\gamma kh})^2} x \quad (4)$$

La estimación de la demanda tras el fallo resultante tiene la ventaja de su simplicidad (linealidad en la expresión, con un coeficiente que depende de la calibración inicial y del tiempo acumulado en los  $k$  tramos recorridos), frente a otros medios de estimación igualmente apropiados como el que se deriva del uso de la fórmula del *logit* incremental.

### 3.3. Poblaciones asociadas a cada punto-horario

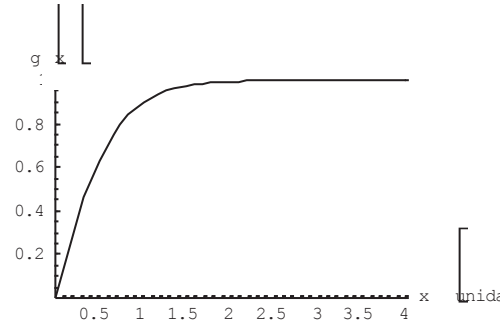
Por definición, el número de viajeros que pueden subir o bajar en cada punto-horario de la bisectriz desplazada del diagrama temporal es cero (el tren no para en dicho tramo), sea cual sea la naturaleza del tramo considerado, tanto si es una estación como si no lo es. Recíprocamente, si

el tramo ferroviario no se corresponde con una estación, los únicos puntos-horarios factibles estarán sobre la bisectriz desplazada del primer cuadrante.

Para el resto de puntos-horarios factibles no aforados  $Q_k^{(j)}(u_k^{(j)}, v_k^{(j)})$  del mapa temporal, se asumirá que sus poblaciones asociadas  $(\alpha_k^{(j)}, \beta_k^{(j)}, \rho_k^{(j)})$  se podrán estimar a partir de los aforos  $(A_k^{(j)}, B_k^{(j)}, R_k^{(j)})$  vinculados a los puntos-horarios  $P_k^{(j)}$  existentes, de acuerdo con las siguientes consideraciones:

1. El número de viajeros  $\alpha_k^{(j)}$  que pueden subir en cada punto-horario  $Q_k^{(j)}$ , que esté por debajo compartiendo verticalidad con un aforado  $P_k^{(j)}$ , es el resultado del producto de  $A_k^{(j)}$  por la función *logit* truncada  $g(x)$ , siendo  $x$  el tiempo total de parada, por  $A_k^{(j)}$ , que comparta verticalidad con un conocido  $P_k^{(j)}$  (es decir, el tren llega a la misma hora de la estación aunque salga antes o después de la hora marcada en  $P_k^{(j)}$ ), siendo  $x$  el tiempo total de parada. Se modela así una pérdida de usuarios por acortar el tiempo de acceso.

$$g(x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 + e^{-\lambda x}}; \quad x \geq 0$$



**Figura 6. Factor *logit* para la estimación de usuarios en  $Q_k^{(j)}$  a partir de aforos**

2. El número de viajeros  $\beta_k^{(j)}$  que pueden bajar en cada punto-horario  $Q_k^{(j)}$ , que esté por encima compartiendo verticalidad con un aforado  $P_k^{(j)}$ , es el resultado del producto de  $B_k^{(j)}$  por la función  $f_k(x)$ , siendo  $x$  el tiempo adicional de retraso en la salida respecto al marcado en la operación normal  $P_k^{(j)}$  (pérdida de usuarios por incremento de tiempo de viaje).
3. Las poblaciones  $\alpha_k^{(j)}$  y  $\beta_k^{(j)}$  asociadas al resto de puntos-horarios  $Q_k^{(j)}(u_k^{(j)}, v_k^{(j)})$  del mismo mapa temporal se construirán a partir de una estimación inicial realizada sobre los dos puntos-horarios adyacentes al aforado  $P_k^{(j)}(ta_k^{(j)}, td_k^{(j)})$ , a izquierda y derecha de la diagonal que pasa por dicho punto.
  - a. La dirección ascendente de la diagonal implica una pérdida de viajeros por incremento de tiempo de viaje (tanto en la llegada como en la salida) que afectará a ambas poblaciones  $\alpha_k^{(j)}$  y  $\beta_k^{(j)}$ .
  - b. La dirección descendente implica una pérdida de viajeros por limitación en el tiempo de acceso que afectará análogamente a ambas poblaciones  $\alpha_k^{(j)}$  y  $\beta_k^{(j)}$ .
  - c. Al resto de puntos-horarios factibles situados a lo largo de las verticales a izquierda y derecha se les aplicará el procedimiento detallado en los puntos previos 1 y 2 para estimar sus poblaciones.



4. Este procedimiento de estimación por vecindad se repite hasta cubrir todo el mapa temporal. Si en los puntos-horarios de una vertical concurren influencias de varios procedimientos de estimación diferenciados, se asume el valor acumulado de todas las estimaciones.
5. Las poblaciones de usuarios que permanecen, en cada tramo  $k$  y para cada tren  $j$ , depende del número de viajeros que acceden y que bajan a lo largo del recorrido. La ocupación puntual del tren satisface una relación recurrente que, para la primera estación, se puede enunciar:  $B_1^{(j)} = 0$ ;  $R_1^{(j)} = A_1^{(j)}$ , y se extiende al resto de puntos:  $R_{k+1}^{(j)} = R_k^{(j)} + A_{k+1}^{(j)} - B_{k+1}^{(j)}$ . Por tanto, bastará con establecer estimaciones sobre el número de viajeros que acceden y que bajan, para deducir la ocupación de cada tren a lo largo de su recorrido.

#### 4. FORMULACIÓN DEL OBJETIVO A OPTIMIZAR EN LA DECISIÓN

Los objetivos que, separadamente o en combinación, se suelen contemplar en la Literatura (Törnquist y Persson, 2007) para la reprogramación de horarios en este contexto son:

- (A) Minimizar el número de trenes que experimentarían retraso
- (B) Minimizar el retraso total final de los trenes (suma de los retrasos de los trenes en alcanzar sus destinos finales)
- (C) Minimizar el retraso total acumulado en los usuarios (se pondera el anterior criterio con la ocupación de los trenes retrasados)
- (D) Minimizar el coste del retraso total (suma de los costes de los retrasos que experimentan los trenes hasta su destino final, añadiendo un coste de usuario durante el viaje debido, por ejemplo, a transbordos y otras incomodidades).

La función objetivo elegida en el presente trabajo enfatiza el carácter de servicio público del sistema ferroviario, al atender preferentemente a los usuarios que habitualmente emplean este medio para desplazamientos a media-larga distancia si se compara con sus competidores metro o autobús. En ese sentido, se adopta como objetivo la maximización del número de viajeros que permanecen en el sistema tras la reprogramación. El modelo de optimización resultante es lineal, de variables enteras, y fácilmente programable para la obtención de buenas soluciones. Otros objetivos a considerar (como los señalados A, B, C y D) son susceptibles de ser también formulados usando las variables y restricciones que a continuación se relacionan:

##### Variables de naturaleza entera

- Índice identificador de cada tren:  $j = 1, \dots, J$
- Índice identificador de cada tramo:  $k = 1, \dots, K$
- Coordenadas genéricas en el mapa temporal correspondiente al tramo  $k$ -ésimo:  
 $(u \equiv u^{(k)}, v \equiv v^{(k)}); \quad 0 \leq u^{(k)} \leq v^{(k)}$

##### Variables de naturaleza real

- Poblaciones en el punto  $(u^{(k)}, v^{(k)})$ ;  $0 \leq u^{(k)} \leq v^{(k)} : A_{uv}^{(k)} \geq 0; B_{uv}^{(k)} \geq 0; R_{uv}^{(k)} \geq 0$

##### Variables de decisión

$$x_{uv}^{(jk)} = \begin{cases} 1, & \text{si el tren } j - \text{ésimo pasa por el tramo } k \text{ en el punto horario } (u^{(k)}, v^{(k)}) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



**Objetivo**

$$\text{MAX} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \sum_v \sum_u R_{uv}^{(k)} \cdot x_{uv}^{(jk)} \quad (5)$$

Sujeto a

$$1. \sum_j \sum_{u,v} x_{uv}^{(jk)} = J; \quad \forall k \quad (6)$$

$$2. \sum_k \sum_{u,v} x_{uv}^{(jk)} = K; \quad \forall j \quad (7)$$

$$3. \sum_u x_{uv}^{(jk)} \leq 1; \quad \forall v; \forall j; \forall k \quad (8)$$

$$4. \sum_v x_{uv}^{(jk)} \leq 1; \quad \forall u; \forall j; \forall k \quad (9)$$

$$5. x_{uv}^{(jk)} \leq \sum_{w \geq v+h} x_{vw}^{(j,k+1)}; \quad \forall u; \forall v; \forall j; \forall k \quad (10)$$

$$6. \sum_{\substack{q=u-h \\ q=h \\ q \leq w+h}}^{q=u-h} \sum_{\substack{w \geq v+h \\ w \geq u+h \\ q \leq w+h}} x_{qw}^{(jk)} + \sum_{\substack{q=v-2h \\ q=u+h \\ q \leq w+h}}^{q=v-2h} \sum_{\substack{w=v-h \\ w=u+2h \\ q \leq w+h}} x_{qw}^{(jk)} \leq nv_k; \quad \forall u; \forall v; \forall j; \forall k \quad (11)$$

$$7. x_{uv}^{(jk)} \in \{0,1\}; \quad \forall u, \forall v, \forall j, \forall k \quad (12)$$

La función objetivo maximiza la movilidad de los usuarios en el servicio ferroviario. La restricción 1 impone que el número de horarios de trenes que necesariamente haya que localizar sea exactamente  $J$ . La condición 2 establece el paso obligado por cada uno de los tramos (con parada o sin ella) para todos los trenes que se determinen. La restricción 3 indica que no puede haber ningún tren que parta de la estación  $k$ -ésima si ya había otro realizando la operación. La restricción 4 indica que no puede haber ningún tren que llegue a la estación  $k$ -ésima si ya había otro ejecutando la operación. La restricción 5 establece que si hay un punto-horario localizado en la posición  $(u,v)$  del mapa temporal correspondiente a la estación  $k$ -ésima, entonces debe haber otro punto-horario de continuación en el mapa temporal correspondiente a la estación  $(k+1)$  situado en la columna  $v$ -ésima. La restricción 6 establece la limitación del número de trenes que pueden operar, teniendo en cuenta el número de vías existente en el tramo; el primer sumando recoge el rectángulo superior-izquierdo del punto  $(u,v)$ , mientras que el segundo sumando reúne los casos del triángulo inferior-derecho de dicho punto. La restricción 7 explicita el carácter binario de las variables de decisión del modelo de Programación Lineal Entera.

Este modelo de decisión utiliza  $J \cdot K \cdot (N_u \cdot N_v)/2$  variables, siendo  $(N_u \cdot N_v)/2$  el número de puntos-horarios  $(u,v)$  factibles en el triángulo superior de los mapas temporales. Diversas consideraciones técnicas, además de las exigencias en el servicio que establece el operador para la prestación del servicio a la comunidad (un tren debe circular en un intervalo horario predeterminado, por ejemplo), pueden incidir en la factibilidad de los puntos-horarios, reduciendo la cifra  $(N_u \cdot N_v)/2$  y atenuando la evidente complejidad computacional del modelo.

Aún disponiendo de eficientes recursos de computación, los problemas de reprogramación de horarios que modelan escenarios reales requieren de procedimientos heurísticos para encontrar buenas soluciones en un tiempo de respuesta dado (Törnquist, 2007). El siguiente algoritmo heurístico considera la maximización global de la suma de  $J$  funciones como el resultado de

seleccionar las  $J$  mejores opciones en secuencia, cada una de ellas obtenidas resolviendo un problema de camino óptimo a lo largo de un grafo orientado con nodos origen y destino prefijados. Las restricciones 1-6 son tenidas en cuenta en la construcción del grafo factible para cada iteración.

**4.1. Algoritmo**

**4.2. Generar la secuencia de mapas temporales correspondientes a los tramos de la línea. Fijar la densidad del mallado  $h$  y el parámetro de calibración de la función logit.**

**Localizar los puntos-horarios existentes  $P_k^{(j)}(ta_k^{(j)}, td_k^{(j)})$ .**

**4.3. Estimar las poblaciones que restan para los puntos-horarios no aforados de acuerdo con el procedimiento anteriormente descrito.**

**4.4. Fijar las restricciones de horarios de trenes en cuanto a número ( $J$ ) y características; como por ejemplo: el primer horario ha de arrancar antes de determinada hora o concluir antes de un límite temporal, etc.**

**4.5.  $j=1$**

Mientras  $j$  sea menor que  $J$

**4.6. 4.1 Conectar los puntos-horarios de los mapas temporales adyacentes, atendiendo a criterios de factibilidad y respetando las restricciones impuestas en la fase anterior.**

4.2 Unir los puntos-horario del mallado inicial a un nodo auxiliar de inicio  $S$  y los puntos-horario del mapa final a un nodo auxiliar final  $F$ . Sea  $G$  el grafo obtenido.

4.3 Determinar el  $j$ -ésimo camino que conecta los nodos  $S$  y  $F$  sobre el grafo  $G$  que maximiza la carga de viajeros (movilidad estimada).

4.4 Eliminar las filas y las columnas correspondientes a los puntos-horarios del  $j$ -ésimo camino óptimo, de acuerdo con las restricciones de existencia.

4.5  $j:=j+1$

**5. APLICACIÓN**

En esta sección se muestra una experiencia computacional en la que se ha considerado una línea de ferrocarril formada por 7 estaciones equi-espaciadas, separadas entre ellas por una distancia (en tiempo de viaje) igual a  $h$ . Se ha asumido un tiempo de operación para la franja temporal de la mañana [8:20-9:30] con particiones de tamaño  $h = 2$  minutos. Inicialmente, se dispone de 3 vehículos para recorrer la línea y las horas de llegada/salida a las estaciones son conocidas por los usuarios (Tabla 1).

**Tabla 1: Horas de llegada/salida por tren y estación**

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	Estación 6	Estación 7
Tren 1	8:26/8:28	8:30/8:32	8:34/8:36	8:38/8:42	8:44/8:48	8:50/8:52	8:54/-
Tren 2	8:38/8:40	8:42/8:44	8:46/8:48	8:50/8:54	8:56/9:00	9:02/9:04	9:06/-
Tren 3	8:50/8:52	8:54/8:56	8:58/9:00	9:02/9:06	9:08/9:12	9:14/9:16	9:18/-

Sobre un conjunto de 10000 usuarios, se asume que las horas más demandadas para llegar a los posibles destinos se concentran en el centro del horizonte temporal. Se ha considerado que en las

estaciones de los extremos se generan principalmente los viajes (correspondientes a núcleos residenciales), mientras que las estaciones intermedias son más propensas a ser destinos elegidos por los usuarios (centros atractores). Con los criterios anteriores se ha construido una matriz origen-destino dependiente del tiempo. A partir de ella, se obtiene el número de usuarios que acceden a cada tren estación (Tabla 2).

**Tabla 2: Acceso de usuarios por tren y estación**

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	Estación 6	Estación 7
Tren 1	1417	1153	664	281	77	39	0
Tren 2	1143	756	359	113	23	10	0
Tren 3	2131	1204	488	117	18	7	0

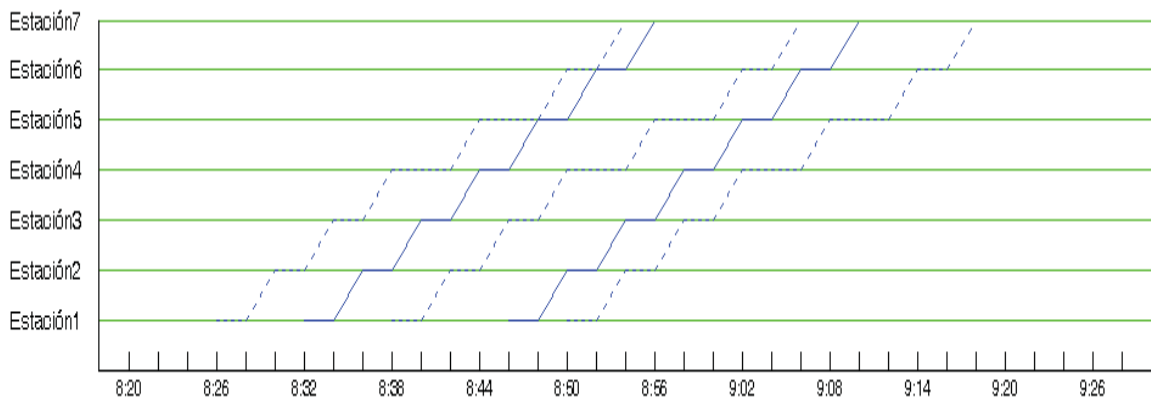
### 5.1. Reprogramación de horarios

Un imprevisto obliga al gestor de operaciones a reducir el tamaño de la flota en una unidad, por lo que se reprograman los horarios de los dos vehículos finalmente disponibles, de manera que se minimice la pérdida de usuarios por adelantos o atrasos en los horarios. La implementación del modelo propuesto en el artículo y su resolución a través del algoritmo, dan como resultado la siguiente reprogramación de horarios (Tabla 3).

**Tabla 3: Nuevas horas de llegada/salida por tren y estación**

	Estación 1	Estación 2	Estación 3	Estación 4	Estación 5	Estación 6	Estación 7
Tren 1°	8:32/8:34	8:36/8:38	8:40/8:42	8:44/8:46	8:48/8:50	8:52/8:54	8:56/-
Tren 2°	8:46/8:48	8:50/8:52	8:54/8:56	8:58/9:00	9:02/9:04	9:06/9:08	9:10/-

En la Figura 7, las líneas punteadas representan la localización de los horarios iniciales y, en línea continua, los horarios óptimamente localizados con la metodología propuesta.



**Figura 7: Diagrama de la nueva/antigua programación**

## 5.2. Análisis de la solución obtenida

El número de pasajeros que se desvían hacia otro medio de transporte viene dado por las funciones logit definidas en los apartados 3.2 y 3.3. Dado que los tiempos de viaje son similares a los del inicio, las pérdidas de usuarios están causadas por el adelantamiento de horarios (usuarios que no han llegado a la estación, pierden el tren), o por atrasos (hay usuarios que ante el retraso en la salida deciden cambiar de medio de transporte). La solución obtenida tras aplicar una metodología miópica, consistente en cancelar el tren que atiende al menor número de usuarios, se ha comparado con la obtenida aplicando el algoritmo, en la que se admiten pequeños adelantos o atrasos en los horarios iniciales para reducir la pérdida de usuarios que provoca la aplicación de la solución miópica. La comparación de los resultados obtenidos por las dos soluciones se resume en la Tabla 4.

**Tabla 4: Usuarios atendidos por cada tren**

	Estado inicial	Solución miópica	Solución algoritmo
tren 1	3631	3631	3940 (1°)
tren 2	2404		4187 (2°)
tren 3	3965	3965	
Total	10000	7596	8127
Pérdidas %	0%	-24,04%	-18,73%

Los resultados obtenidos son prometedores, si bien son fuertemente sensibles al valor de los parámetros de la función logit utilizada para el modelo de demanda, haciendo necesaria una correcta calibración de los mismos.

## AGRADECIMIENTOS

Este artículo ha sido patrocinado con subvenciones del Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas (proyecto PT-2007-003-08-CCPP, Ministerio de Fomento del Gobierno de España) y del Sexto Programa Marco de la Unión Europea (proyecto ARRIVAL, contrato FP6-021235-2). Deseamos expresar nuestra gratitud a los árbitros anónimos que, con sus comentarios, han contribuido a mejorar la versión inicial del trabajo.

## REFERENCIAS

Cordeau, J-F., Toth, P., y Vigo, D. (1998) A survey of optimization models for train routing and scheduling. **Transportation Science** 32 (4), 380–404.

Eberlein, X.-J., Wilson, N.H.M., y Bernstein, D. (1999) Modeling Real-Time Control Strategies in Public Transit Operations. En: N.H.M. Wilson, (ed.), *Computer-Aided Transit Scheduling, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 471, Springer-Verlag, 325-346.

O' Dell, S., y Wilson, N.H.M. (1999) Optimal Real-time Control Strategies for Rail Transit Operations During Disruptions. En: N.H.M. Wilson (ed.), *Computer-Aided Transit Scheduling, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 471, Springer-Verlag, 299-323.

Pozo, M. A., Mesa, J. A., y Ortega, F. A. (2008) Strategies based on the Determination of Stops that Maintain Robustness in Rapid Transit Systems. **Proceedings of the EWGLA XVII** (Euro Working Group on Locational Analysis). Elche (España).

Tirachini, A., Cortés, C.E., y Jara-Díaz, S.R. (2007) Estrategias Integrada de Asignación de Flota en un Corredor de Transporte Público. **Actas del XIII Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte**. Santiago de Chile (Chile).

Törnquist, J. (2007) Railway traffic disturbance management -An experimental analysis of disturbance complexity, management objectives and limitations in planning horizon. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, 41 (3), 249-266.

Törnquist, J. y Persson, J. A. (2007) N-tracked railway traffic re-scheduling during disturbances. **Transportation Research B**, 41, 342-362.