

---

## ANÁLISIS DE UN RESULTADO CONTRA-INTUITIVO DEL MODELO GRAVITACIONAL DE DISTRIBUCIÓN DE VIAJES

Angelo Guevara, Alejandro Llanos<sup>1</sup>  
Secretaría Interministerial de Planificación de Inversiones en Infraestructura de Transporte,  
SECTRA  
Teatinos 950 piso 16 , Santiago, Chile.  
Fax : (56-2)-6966477.  
e-mail: [crguevar@hotmail.com](mailto:crguevar@hotmail.com)

### RESUMEN

La motivación central de este trabajo fue estudiar un resultado contra-intuitivo detectado en algunas aplicaciones del Modelo Gravitacional de Distribución de Viajes (*MGDV*), que se denominó como “Paradoja de Distribución de Viajes” (*PDV*) y que corresponde a un aumento (disminución) en el costo generalizado total del sistema, como consecuencia de la disminución (aumento) del costo generalizado de algún(os) par(es) origen destino. En primer término se realizó una revisión de antecedentes del *MGDV*, que permitió identificar algunas críticas y propuestas de modificación al *MGDV*, además de una paradoja que se produce en un modelo de características similares y que corresponde a lo más parecido a la *PDV* encontrado en la literatura. A continuación, se realizó un análisis descriptivo de la *PDV* mediante un *MGDV* experimental, para luego justificar analíticamente los resultados observados y determinar el punto crítico de ocurrencia del fenómeno en el *MGDV* doblemente acotado. De esta manera fue posible concluir que el origen de la *PDV* no es inherente al problema de distribución y podría producirse en modelos de elección de modo o ruta, en la medida en que el efecto que un aumento (disminución) de costos produce en la demanda, se traduzca en un menor (mayor) consumo global neto. Finalmente, el análisis de una aplicación Etraus donde se registra el inusual resultado de un aumento en el consumo de tiempo del sistema al simular una línea de Metro, permitió concluir que, si bien en este caso la *PDV* no está presente, es posible verificar la concavidad de la función de costo total descrita en el estudio del modelo experimental y el teórico. El trabajo termina sintetizando las principales conclusiones y posibles líneas de investigación.

---

<sup>1</sup> Investigación desarrollada como parte de la memoria de título de Ingeniero Civil, mención Transportes de la FCFM de la Universidad de Chile

## 1. INTRODUCCION

El *MGDV* corresponde a la segunda etapa del modelo clásico de transporte de cuatro etapas y busca responder, dado un total de viajes atraídos y generados por las zonas en que se dividió el área de modelación, cómo se distribuirán dichos viajes en la matriz. El modelo más popular se define como la solución del problema de optimización con restricciones, representado por el siguiente *Lagrangeano*.

$$L = \sum_{ij} (V_{ij} - V_{ij} \ln(V_{ij})) + \sum_i \lambda_i^{(1)} (O_i - \sum_j V_{ij}) + \sum_j \lambda_j^{(2)} (D_j - \sum_i V_{ij}) + \beta (C - \sum_{i,j} V_{ij} c_{ij}) \quad (1)$$

Donde  $V$  es el total de viajes de la matriz,  $V_{ij}$  corresponde a los viajes entre la zona  $i$  y la  $j$ ,  $\lambda_i^{(1)}$ ,  $\lambda_j^{(2)}$  y  $\beta$  corresponden a los Multiplicadores de Lagrange de las restricciones: De que cada fila de la matriz de viajes sume el total de viajes generados por la zona respectiva ( $O_i$ ); que cada columna de la matriz de viajes sume el total de viajes atraídos por la zona respectiva ( $D_j$ ); y que el costo total del sistema sea igual a cierto valor fijo  $C$  respectivamente.

El parámetro  $c_{ij}$  corresponde al costo “generalizado” de desplazarse de  $i$  a  $j$  y puede ser expresado de diferentes maneras. La expresión utilizada habitualmente en aplicaciones prácticas del modelo clásico de transporte, corresponde a la utilidad máxima esperada de los modos disponibles en el par origen destino específico, es decir, al logaritmo de la suma de las exponenciales de la utilidad de dichos modos o nidos<sup>2</sup> (Ortúzar y Willumsen,1994).

La resolución del problema de optimización (1), da como resultado que el total de viajes modelados de la zona  $i$  a la  $j$  sean

$$V_{ij} = A_i O_i B_j D_j \exp(-\beta c_{ij}) \quad (2)$$

en que  $A_i$  y  $B_j$  se denominan “Factores de Balance”, se resuelven mediante iteraciones y cumplen la función de permitir que el total de viajes generados y atraídos sea constante. De esta manera el único parámetro a calibrar es  $\beta$ , que se obtiene verificando la condición de que los costos observados totales sean iguales a los costos modelados (Ortúzar y Willumsen,1994).

Este modelo matemático desarrollado por Wilson (1970, 1987), puede sustentarse en diversas bases teóricas: Una adaptación de la teoría de la gravitación universal (Ortúzar y Willumsen,1994); la maximización de la entropía o enfoque “combinatorial”, la teoría de la información o la teoría de la maximización de la utilidad (Anas, 1981). Ejemplos de métodos de deducción e interpretaciones alternativas del mismo modelo pueden encontrarse en Norcliffe (1975), Cesario (1973), Kirby ( 1975) y Kirby y Cesario (1976).

Este trabajo se estructura de la siguiente manera: En el punto dos se reportan algunas críticas y propuestas de modificación del *MGDV* detectadas en la literatura, además de describirse una

<sup>2</sup> Cabe destacar que, dado que el costo generalizado se calcula como el logaritmo de una función, éste puede tomar valores negativos, lo cual podría parecer contra-intuitivo considerando la definición original del modelo. Sin embargo, es posible demostrar que, dado que lo único relevante, tanto para el cálculo de la matriz de viajes como para la determinación del parámetro de calibración  $\beta$ , es la diferencia de costo entre las celdas y no su valor absoluto, el resultado es el mismo si se agrega una constante a cada celda de la matriz de costos de manera de transformar todos los valores en positivos, por lo cual la posible inconsistencia desaparece.

paradoja que ocurre en un problema de optimización de características similares al estudiado. El punto tres se divide en cuatro sub-secciones: En la primera se analiza la *PDV* a partir de un modelo reducido, generado con datos arbitrarios; en la segunda se realiza una justificación teórica de la *PDV* a partir de un modelo simplificado; en la tercera se determina el punto crítico a partir del cual se produce la *PDV* en un *MGDV* doblemente acotado; y en la cuarta sub-sección se reporta el análisis realizado a partir de una aplicación práctica del modelo de equilibrio simultáneo Distribución-Partición modal-Asignación desarrollado por SECTRA “Estraus”. Finalmente, en el punto cuatro se sintetizan las principales conclusiones y líneas de investigación.

## 2. REVISION DE ANTECEDENTES

Con el objetivo de conocer los fundamentos, limitaciones y propuestas de modificación del *MGDV* en la literatura, además de detectar posibles reportes de la *PDV*, se desarrolló una revisión de antecedentes bibliográficos que es reportada en esta sección.

### 2.1. Observaciones a la Aplicación Práctica del *MGDV*

Hyman y Wilson (1968) proponen explorar hipótesis alternativas a mantener el parámetro  $\beta$  constante al evaluar proyectos de transporte, tales como mantener el costo total ( $CT = \sum V_{ij} c_{ij}$ ) o el producto  $\beta * CT$  constantes. Esta propuesta de modificación parece interesante, sin embargo, los autores no son concluyentes a este respecto.

Por otra parte, en Mideplan et. al. (1994) se reporta la calibración de la etapa de distribución del modelo Estraus para la ciudad de Santiago de Chile. En dicho trabajo se indica que con el fin de poder reproducir en un nivel aceptable los viajes observados entre pares y los flujos asignados a la red, fue necesario generar una “estructura de ceros”, que corresponde a la inclusión de condiciones que obligan a que la matriz modelada por el *MGDV* “respete” las celdas vacías que tenía la matriz observada con los consiguientes efectos negativos en la capacidad que el modelo tiene de predecir estados futuros del equilibrio.

### 2.2. Algunas Modificaciones Propuestas al *MGDV*

Wilson (1970)<sup>3</sup> plantea una modificación al *MGDV* que consiste en plantear, en vez de la restricción de costo total del sistema fijo original, restricciones de costo total fijo para cada origen y destino en forma independiente. Con esta modificación, la expresión final del modelo es la siguiente:

$$V_{ij} = A_i O_i B_j D_j \exp(-\mu_i^{(1)} c_{ij} - \mu_j^{(2)} c_{ij}) \quad (3)$$

en que  $\mu_i^{(1)}$ ,  $\mu_j^{(2)}$  son los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las dos restricciones de costo respectivamente y  $A_i$  y  $B_j$  tienen la interpretación usual.

<sup>3</sup> Reinterpretando un trabajo desarrollado por Edens (1970).

Este modelo tiene la cualidad de considerar un total de parámetros de ajuste del modelo igual a dos veces el número de zonas, en vez de uno solo como ocurría con el modelo original, lo cual debiera permitir un ajuste mucho más preciso en términos del número de viajes observados y modelados en cada par  $OD$  y luego, podría ser una propuesta apropiada para el problema de “estructura de ceros” descrito en el punto anterior. Sin embargo, hay que tener en consideración en este caso la necesidad de re-interpretar los parámetros de manera de poder justificar múltiples valores para usuarios del mismo estrato.

Otra modificación es la que plantean Dacey y Norcliffe (1977). Los autores consideran un modelo de distribución de viajes doblemente acotado, flexible, en el que se plantean las siguientes desigualdades de origen y destino, donde  $N_i$  y  $M_j$  corresponden al número de viajes generados y atraídos máximos respectivamente

$$0 \leq \sum_j V_{ij} \leq N_i \quad \forall i \quad (4)$$

$$0 \leq \sum_i V_{ij} \leq M_j \quad \forall j \quad (5)$$

Los autores consideran además que la probabilidad de que cualquiera de los viajes posibles desde  $i$  a  $j$  sea realizado, está dada por la siguiente expresión<sup>4</sup>  $P_{ij} = 1/[1 + \exp(\beta c_{ij} - \mu)]$ , donde  $\beta$  tiene su significado usual y  $\mu$  es un parámetro asociado a la restricción (5). La formulación final del modelo es la indicada en la expresión (6), donde que  $O_i$ ,  $D_j$  y  $V_{ij}$  son cantidades desconocidas para ser estimadas al usar el modelo :

$$V_{ij} = \frac{\min(N_i - O_i + V_{ij}, M_j - D_j + V_{ij})}{1 + \exp(\beta c_{ij} - \mu)} \quad (6)$$

Por otra parte, Goncalves y Ulysséa-Neto (1993) planean un modelo que corresponde a una combinación del modelo gravitacional clásico y el modelo de oportunidades<sup>5</sup> y está determinado por las siguientes expresiones finales:

$$V_{ij} = A_i O_i B_j D_j \exp(-\lambda W_{ij} - \beta c_{ij}) \quad (7)$$

Donde  $A_i$  y  $B_j$  tienen la interpretación usual;  $W_{ij}$  es el número de oportunidades existentes para satisfacer el objetivo de viajes entre las zonas  $i$  y  $j$ ;  $\lambda$  y  $\beta$  son parámetros a calibrar del modelo. El modelo de gravedad entonces se obtiene para el caso particular en que  $\lambda = 0$ . El punto clave en este caso está en la forma en que se determina la variable  $W_{ij}$ .

### 2.3. Paradoja de “Más por Menos” o “Paradoja de Transporte”

En esta sección se presenta un fenómeno ampliamente descrito en la literatura relacionada con programación lineal, como por ejemplo Murty (1976), que guarda cierta similitud con el fenómeno estudiado. Este fenómeno corresponde a un resultado paradójico de lo que denomina

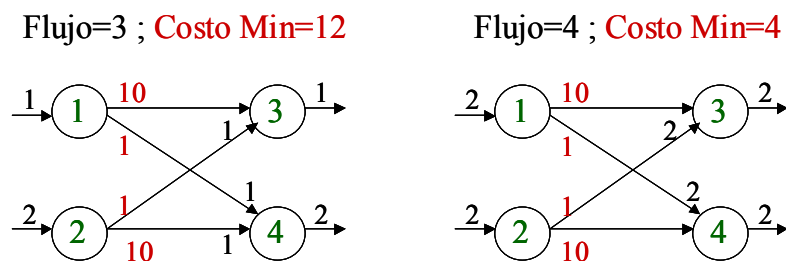
<sup>4</sup> Expresión obtenida de la mecánica estadística.

<sup>5</sup> La idea básica detrás del modelo de oportunidades es que la realización de viajes no está explícitamente relacionada con la distancia, si no que con las oportunidades para satisfacer los objetivos del viaje en los diferentes destinos.

como “problema de transporte”<sup>6</sup>, que corresponde a la minimización del costo de distribuir productos desde los centros de producción a los de consumo, considerando que los costos entre pares origen destino son fijos. Este problema puede ser representado por el siguiente *Lagrangeano*.

$$L = \sum_{ij} c_{ij} V_{ij} + \sum_i \lambda_i^{(1)} (\sum_j V_{ij} - O_i) + \sum_j \lambda_j^{(2)} (\sum_i V_{ij} - D_j) \quad (8)$$

El resultado paradójico, conocido como “Paradoja de Más por Menos”, corresponde a que es posible que, bajo ciertas circunstancias, el costo total del sistema pueda disminuir al aumentar el número de productos transportados. En la Figura 1 se muestra un ejemplo sencillo del problema, donde el costo de cada ruta está destacado en un color más claro al principio de cada arco y los flujos asignados, en un color más oscuro, al final de cada arco.



**Figura 1: Paradoja de “Más por Menos”**

Se puede apreciar que en la situación de la izquierda, se transportan 3 unidades de producto en el sistema a un costo mínimo de 12, y en el sistema de la derecha, con los mismo costos por arco, se transportan 4 unidades de producto a un costo de 4.

Este ejemplo sirve para mostrar también lo que diversos autores sindicaron como el origen de la paradoja, el hecho de que el modelo deba asignar el 100% de los flujos, manteniendo el total de productos que salen y que llegan a cada origen y destino respectivamente, constantes.

### 3. ANÁLISIS DE LA PARADOJA DE DISTRIBUCION DE VIAJES (PDV)

#### 3.1. Análisis Descriptivo de la PDV a Partir de un Modelo Experimental

En esta sección se describe el resultado del análisis realizado a partir de un *MGDV* experimental de tres zonas. El modelo experimental se construyó a partir de vectores origen destino, una matriz de viajes observados y una matriz de costos, generados en base a datos arbitrarios. Los datos utilizados fueron los siguientes<sup>7</sup>:

<sup>6</sup> El problema estudiado en este caso, a pesar de corresponder a la distribución de productos (y no de viajes) es muy similar al *MGDV*. En efecto, según se señala en Williams (1976), es posible demostrar que, cuando el parámetro  $\beta$  del *MGDV* tiende a infinito, el problema (1) se transforma precisamente en el problema (8).

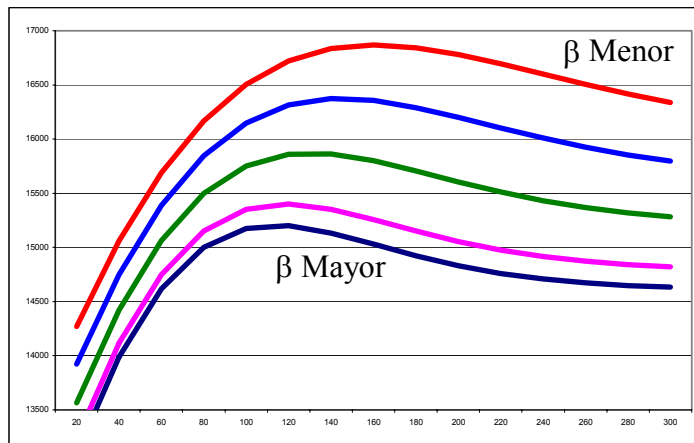
<sup>7</sup> Se realizaron experimentos con diferentes dimensiones del problema y datos, llegándose a las mismas conclusiones detalladas más adelante.

Costo generalizado	Viajes
$\begin{bmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 100 & 50 & 60 \\ 150 & 200 & 50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 60 & 20 & 30 \\ 25 & 50 & 40 \\ 10 & 10 & 70 \end{bmatrix}$

**Figura 2: Matriz de Viajes y Matriz Costos Utilizadas**

A continuación, se calibró el parámetro  $\beta$  para estos datos (resultando  $\beta=0,0183$ ) y con él una matriz de viajes modelados y un costo total modelado  $CT=16200$ , que es igual al costo “observado” por condición de calibración. Luego, se procedió a modificar la celda 3-2 de la matriz de costos variándola en un rango que va desde 20 a 300 unidades de costo, calculando en cada caso los viajes modelados para cada celda y luego el costo total del sistema como la suma del producto de éstos por sus respectivos costos. Con esto fue posible construir una función de Costo Total en función del costo de la celda 3-2 para  $\beta = 0,0183$ .

Luego, se replanteó el problema, considerando que la matriz de costos “observados” era igual a la original, salvo por una modificación en el valor de la celda 3-2. Luego, para diferentes valores de  $c_{32}$  fue posible calcular un parámetro  $\beta$  que ajustara el costo observado al modelado y, así mismo, una curva Costo Total en función del costo de la celda 3-2 para cada  $\beta$ . Estas curvas son presentadas en la Figura 3.



**Figura 3: Evolución del Costo Total en Función de  $c_{32}$  al Variar  $\beta$**

Analicemos primero una curva en forma aislada. En la Figura 3 puede observarse cómo, en cierto rango de variación del costo generalizado  $c_{32}$ , cuando  $c_{32}$  aumenta el valor del Costo Total disminuye; es decir,  $\delta CT / \delta c_{32} < 0$ . Esto implica que, en el caso que el costo generalizado  $c_{32}$  se encuentre en la zona de pendiente negativa, si se llevara a cabo algún proyecto que implicara su reducción, manteniendo el valor de los demás costos generalizados constantes, el costo total del

sistema de transporte aumentaría, lo que resulta contra-intuitivo y se define precisamente como la *PDV*<sup>8</sup>.

Por otra parte, se observa que cada curva es cóncava hasta cierto valor crítico que, para todos los valores de  $\beta$  analizados, resultó estar en la parte de la curva con pendiente negativa. Esto implica que, si consideramos la parte de la curva con pendiente positiva, resulta más provechoso realizar proyectos de transporte que reduzcan los costos de pares *OD* más “cercanos” –con costo generalizado menor- que los de pares más “lejanos” –con costo generalizado mayor-.

Finalmente, al analizar las curvas en conjunto, se observan dos efectos: A medida que el parámetro de sensibilidad al costo  $\beta$  aumenta, el costo total máximo disminuye y, al mismo tiempo, el punto a partir del cual se produce la *PDV* se desplaza a la izquierda<sup>9</sup>.

### 3.2. Justificación Analítica de la *PDV* en un Modelo General

Con el fin de poder establecer en forma fehaciente el origen de la *PDV*, se realizó un análisis conceptual del problema en cuestión. Supongamos que deseamos modelar la cantidad de personas que se inclina por cada una de dos alternativas disponibles (por ejemplo dos destinos o modos) en función del costo asociado a la primera de ellas *Alt1*.

Supongamos que el total de individuos que se inclina por una alternativa disminuye en la medida que el costo de dicha alternativa aumenta y, sólo por simplicidad, que esa disminución es lineal en el costo respectivo. Supongamos además que el número de individuos que elige la segunda alternativa corresponde a la diferencia entre el total de individuos y los que eligen la primera y que el costo de la segunda alternativa es cierto valor  $c_{Alt2}=c_0$ . Bajo estos supuestos, será posible construir las funciones  $f_1(c_{Alt1})$  y  $f_2(c_{Alt1})$  que corresponden a la cantidad de individuos que eligen *Alt1* y *Alt2* en función del costo de *Alt1*. Estas funciones son representadas en la Figura 4, donde se supuso además por simplicidad que  $f_1(c_0)=f_2(c_0)$ .

Si suponemos que el costo de *Alt2* se mantiene en  $c_2 = c_0$ , la *PDV* se producirá en la medida en que se cumpla que ante un aumento del costo de *Alt1* de  $c_1$  a  $c_1 + \delta$  se tenga que *CT* final sea menor que el inicial. Formalmente:

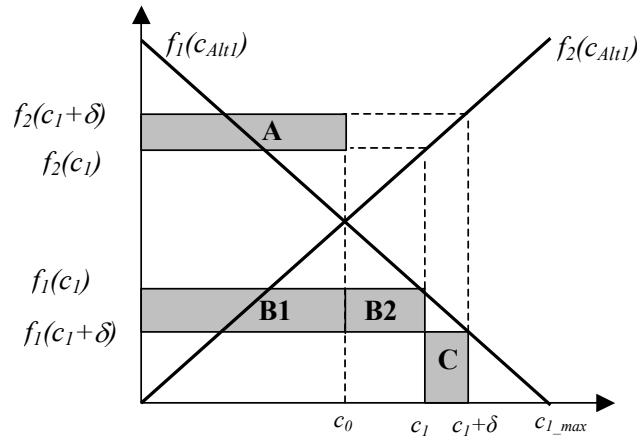
$$CT_{mic} = f_1(c_1)*c_1 + f_2(c_1)*c_0 > f_1(c_1 + \delta)*(c_1 + \delta) + f_2(c_1 + \delta)*c_0 = CT_{fin} \quad (9)$$

$$c_1 * [f_1(c_1) - f_1(c_1 + \delta)] - [f_2(c_1 + \delta) - f_2(c_1)] * c_0 > f_1(c_1 + \delta) * \delta \quad (10)$$

$$B_1 + B_2 - A > C \quad (11)$$

<sup>8</sup> Cabe destacar que la *PDV* difiere de la “Paradoja de Más por Menos” en el sentido de que en la primera es un cambio de los parámetros del problema ( $c_{ij}$ ) el que produce el resultado contra-intuitivo y en la segunda es el espacio de soluciones (vectores *OD*) el cambia.

<sup>9</sup> La justificación analítica de las características detectadas para la función *CT* se verá en las secciones siguientes. Sin embargo, es posible decir algo sobre el hecho de que a medida que el parámetro de sensibilidad al costo  $\beta$  aumenta, el costo total máximo disminuye. Este comportamiento se explica pues mientras mayor sea la sensibilidad al costo, los viajes serán asignados a pares *OD* más económicos, lo que se traducirá en un menor costo del sistema.



**Figura 4: PDV en un Modelo General**

Por los supuestos realizados para construir el gráfico de la Figura 4, se tiene que  $A = B_1$  y por lo tanto, la *PDV* se producirá cuando

$$B_2 > C \quad (12)$$

En el caso en que las funciones  $f_1(c_{Alt1})$  y  $f_2(c_{Alt1})$  sean lineales como en la Figura N°4, la condición (12) se producirá, para un valor pequeño de  $\delta$ , cuando  $c_1$  sea igual al punto medio entre  $c_0$  y  $c_{1\_Max}$ . Este punto crítico se verá modificado en la medida que alguno de los supuestos implícitos en la Figura N°4 se modifique. Por ejemplo, si el costo de la *Alt2* fuese mayor que  $c_{1\_Max}$ , el área *A*, será siempre más grande que  $B_1 + B_2$  y, por lo tanto, este punto crítico nunca existiría. En cambio, si el costo de la *Alt2* fuese cero, el punto crítico se produciría en  $c_1 = c_0$ . Ahora bien, si las funciones  $f_1$  y  $f_2$  no fuesen lineales, el punto crítico se debiera desplazar más a la izquierda o la derecha dependiendo de las características de las funciones.

Establezcamos ahora las condiciones generales sobre un problema de este tipo. Suponiendo que el costo observado de *Alt2* es fijo e igual a  $c_2$ , analicemos la derivada de la función de Costo Total (*CT*) definida de la siguiente forma.

$$\frac{\partial CT}{\partial c_1} = \partial(f_1(c_1) * c_1 + f_2(c_1) * c_{21}) / \partial c_1 = \frac{\partial f_1(c_1)}{\partial c_1} * c_1 + f_1(c_1) + \frac{\partial f_2(c_1)}{\partial c_1} * c_2 \quad (13)$$

Se puede demostrar fácilmente que, si el total de viajes es fijo [ $f_1(x) + f_2(x) = Cte$ ], las derivadas de  $f_1$  y  $f_2$  son iguales, pero con signo contrario. Luego:

$$\frac{\partial CT}{\partial c_1} = \frac{\partial f_1(c_1)}{\partial c_1} * (c_1 - c_2) + f_1(c_1) \quad (14)$$

De esta forma, el resultado contra-intuitivo estudiado se producirá cuando la expresión anterior sea negativa, lo que ocurrirá en la medida que  $\partial f_1(c_1) / \partial c_1$  sea negativa y que  $c_1$  sea suficientemente grande<sup>10</sup>.

<sup>10</sup> Cabe destacar que, en caso que *Alt1* sea un bien de Giffen, es decir, que la función  $f_1(c_1)$  sea creciente en  $c_1$ , bastará que  $c_2$  sea suficientemente más grande que  $c_1$ , para que se produzca la “paradoja”, la cual se explicaría en este caso sólo por la reducción de demanda por *Alt2*.



En este punto, cabe destacar que la condición de ocurrencia de la paradoja no es inherente a la condición de suma fija [ $f_1(x)+f_2(x)=Cte$ ]. En efecto, si levantásemos la restricción de que el total de elecciones se mantienen invariante, por ejemplo, suponiendo que el total de individuos que se inclina por *Alt2* se mantiene fijo, en la expresión (14) desaparece  $c_2$ , haciendo la condición menos restrictiva.

Analicemos ahora la concavidad de la función *CT*. Su segunda derivada tendrá la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 CT}{\partial c_1^2} = \frac{\partial^2 f_1(c_1)}{\partial c_1^2} * (c_1 - c_2) + 2 \frac{\partial f_1(c_1)}{\partial c_1} \tag{15}$$

Luego, la función será cóncava en la medida que la expresión anterior sea negativa, lo que dependerá del signo de la primera y segunda derivada de  $f_1$  y de qué tan a la derecha o a la izquierda de  $c_2$  se esté. En el caso que la función sea lineal (como en la Figura 4) la segunda derivada será cero y por lo tanto *CT* será cóncava en todo su dominio en la medida que la primera derivada de  $f_1$  sea negativa. En el caso que  $f_1$  sea cóncava para  $c_1 < c_0$  y convexa para  $c_1 > c_0$ <sup>11</sup>, la concavidad de la función de *CT* está asegurada para  $c_1 < c_0$  y para  $c_1 > c_0$  se verificará sólo hasta cierto valor crítico.

Cabe destacar que el análisis realizado en esta sección, es válido para cualquier función y en particular para la función correspondiente al *MGDV*. En efecto, puede verse que las conclusiones son plenamente compatibles con lo reportado en la Figura 3.

### 3.3. Punto Crítico para la Ocurrencia de la *PDV* en el *MGDV* Doblemente Acotado

Con el fin de determinar el punto crítico a partir del cual se produce la *PDV* en un *MGDV* doblemente acotado, se analizó la derivada de la función de costo total (*CT*) del *MGDV*. Formalmente, se impuso la condición de que la derivada del costo total fuese negativa:

$$\frac{\partial CT}{\partial c_{pq}} = \partial \left( \sum_{ij} V_{ij} c_{ij} \right) / \partial c_{pq} = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial V_{ij}}{\partial c_{pq}} c_{ij} \right) + V_{pq} < 0 \tag{16}$$

Desarrollando y agrupando convenientemente los términos, se llega a que la condición necesaria para la ocurrencia de la *PDV* en un *MGDV* doblemente acotado es la siguiente.

$$\sum_{i,j} \frac{1}{\beta} \left( \eta_{A_i, c_{pq}} + \eta_{B_j, c_{pq}} \right) \frac{V_{ij} c_{ij}}{V_{pq} c_{pq}} + \frac{1}{\beta} < c_{pq} \tag{17}$$

en que  $\eta_{A_i, c_{pq}} = \frac{\partial A_i}{\partial c_{pq}} \frac{c_{pq}}{A_i}$  y  $\eta_{B_j, c_{pq}} = \frac{\partial B_j}{\partial c_{pq}} \frac{c_{pq}}{B_j}$  denotan las elasticidades de  $A_i$  y  $B_j$  con respecto a  $c_{pq}$ .

De la expresión (17) se infiere que, tal como ocurría en el análisis de la Figura 3, la *PDV* se verificará en la medida en que  $c_{pq}$  sea más grande que cierto valor y que dicho punto crítico se

<sup>11</sup> Como ocurre para los modelos de elección discreta de modo, destino y también para el *MGDV* simple y doblemente acotado.

hará más pequeño en la medida que  $\beta$  crezca. Esta última afirmación será válida en la medida en que, tanto las elasticidades de los factores de balance, como la razón  $V_{ij}/V_{pq}$  se reduzcan, o se mantengan invariantes en la medida que  $\beta$  crezca, condición que, al parecer, no puede deducirse en forma analítica, debido a que las elasticidades de los factores de balance se resuelven en forma iterativa (Llanos, 2003).

### 3.4. Análisis de la *PDV* en una Simulación ESTRAUS con Aumento en el Consumo de Tiempo

En esta sección se describe el análisis realizado a partir de los resultados de dos simulaciones del modelo de equilibrio simultáneo Distribución-Partición modal-Asignación Estraus. Las simulaciones Estraus utilizadas corresponden a la situación Base (*base\_rec\_fp05*) y Proyecto (*proy\_rec\_fp05*), desarrolladas por SECTRA para estudiar una línea de Metro por los ejes Recoleta e Independencia en la ciudad de Santiago, en el período Fuera de Punta para el corte temporal 2005.

En estas simulaciones se verifica el inusual resultado de registrar un aumento en el consumo de tiempo del sistema en la situación con Proyecto, con respecto a la situación Base. Este resultado podría ser explicado por cualquiera de las etapas del modelo, o incluso por problemas de convergencia, sin embargo, existe la posibilidad de que la etapa de distribución sea la responsable del fenómeno, razón por la cual fue elegida para este análisis.

El primer ejercicio realizado consistió en verificar si se estaba en presencia de la *PDV*, es decir, si el costo generalizado total había aumentado en vez de disminuir en la situación con Proyecto con respecto a la situación Base<sup>12</sup>, concluyéndose que, aún en una simulación Estraus tan peculiar como la utilizada, la *PDV* no ocurría<sup>13</sup>. El segundo ejercicio consistió en construir un modelo gravitacional agregado a nivel comunal a partir de la información de viajes y costos generalizados resultantes de la simulación Estraus para la situación Base. Una vez construido este modelo, se calculó en forma aproximada la derivada del costo generalizado total con respecto al costo de cada celda, evaluando el efecto de una pequeña variación en el costo de cada celda de la matriz en el costo generalizado total del sistema<sup>14</sup>. Con esto se esperaba verificar si existía algún par origen destino para el cual la *PDV* fuera posible. El resultado obtenido fue que de los 1.156 pares *OD* internos en la matriz, sólo 5 presentaban variaciones negativas del costo total.

De esta manera fue posible obtener, para cada celda de la matriz de costo, su respectiva derivada del costo total, con lo cual se construyó una función. En la Figura 5 se presenta dicha curva suavizada por las medias móviles. En esta figura se observa que, en la medida que el costo de la

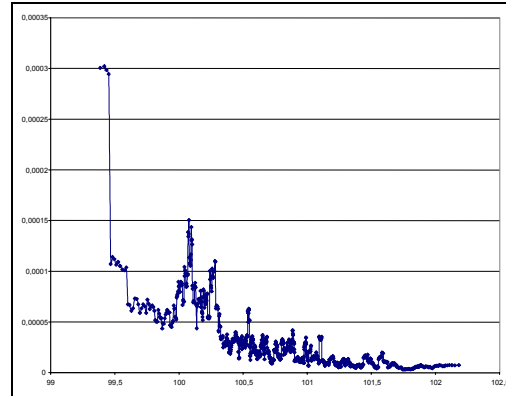
---

<sup>12</sup> Este efecto es diferente al aumento en el consumo de tiempo señalado como característica singular de la simulación.

<sup>13</sup> En estricto rigor, la *PDV* descrita en este trabajo corresponde a un análisis aislado del modelo de Distribución, por lo cual su ocurrencia en una simulación Estraus no podría ser analizada en forma directa ya que en dicho software se simula el equilibrio entre los modelos de Distribución, Partición Modal y Asignación.

<sup>14</sup> En este ejercicio los costos fueron hechos todos “positivos”, sumando el valor arbitrario 100 a la matriz lo cual, según se discutió anteriormente, no modifica los resultados del modelo. La elección del valor 100 tiene relación con la posibilidad de calcular en forma apropiada las derivadas del costo total con EXCEL, que las exponenciales no se indefinan y que el paso elegido para calcular las derivadas ( $1e-8$ ) fuese, al mismo tiempo, suficientemente pequeño.

celda  $pq$  es más grande, el efecto de una reducción marginal de  $c_{pq}$  en el costo total del sistema es menor, lo cual es consistente con lo presentado en la Figura N°3 como resultado del estudio del modelo experimental con respecto a la concavidad de la función de costo total en función del costo de una celda, bajo cierto límite.



**Figura 5: Costo Celda v/s Derivada CT (Medias Móviles)**

#### 4. SINTESIS, CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

En primer término, en este trabajo se recopiló información con respecto a críticas y propuestas de modificación del modelo de distribución de viajes, identificándose algunos trabajos que podrían transformarse en propuestas interesantes de mejoras como la consideración de parámetros de costo diferenciados por zona y sentido del viaje (Wilson, 1970), modelos con restricciones flexibles de origen y destino (Dacey y Norcliffe, 1977) o modelos que fusionan el concepto de entropía y oportunidad (Goncalves y Ulysséa-Neto, 1993). Modificaciones del *MGDV* de este tipo debieran traducirse en mayor flexibilidad y ajuste a los datos observados que el modelo tradicional, lo que podría subsanar, eventualmente, problemas como la imposición de estructuras pre-determinadas en la etapa de calibración. En forma adicional, se reportó un resultado paradójico del modelo de distribución de productos, conocido como “paradoja de más por menos” y que podría tener un símil en el *MGDV*.

Con respecto al resultado contra-intuitivo que motivó esta investigación, se concluyó que la *PDV* es factible, al menos para el caso en que se analiza la variación de una celda de la matriz de costo. Se concluyó además que el origen de la *PDV* no es inherente al problema de distribución y podría producirse en modelos de elección de modo o ruta, en la medida en que el efecto que un aumento (disminución) de costos produce en la demanda, se traduzca en un menor (mayor) consumo global neto. Por otra parte, se determinó que el punto crítico a partir del cual la *PDV* se produce en el caso del *MGDV* doblemente acotado, corresponde a cierto valor del costo generalizado para arriba y que este punto crítico disminuiría en la medida que la sensibilidad de los usuarios al costo aumenta.

Finalmente, cabe destacar como líneas de investigación interesantes para avanzar en la comprensión de la *PDV* en el *MGDV* doblemente acotado, el análisis de la modificación de varios costos de la matriz a la vez y el cálculo e interpretación de las derivadas de los Factores de Balance.

---

**REFERENCIAS**

Anas, A. (1981) Discrete choice theory, information theory and the multinomial logit and gravity models. **Transportation Research 17B,13-23.**

Cesario, F. (1973) A note on the entropy model of trip distribution. **Transportation Research 7, 331-333.**

Dacey, M. y Norcliffe, A. (1977) A flexible doubly-constrained trip distribution model. **Transportation Research 11, 203-204.**

Edens, H. (1970) Analysis of a modified gravity model. **Transportation Research 4, 51-62.**

Goncalves, M. y Ulysséa-Neto, I (1993) The development of a new gravity-opportunity model for trip distribution. **Environment and planning A 25, 817-826.**

Hyman, G. y Wilson, A. (1968) **The effects of changes in travel costs on trip distribution and modal split.** Centre for environmental studies, Londres.

Kirby, H. (1975) A comment on Cesario`s note on trip distribution. **Transportation Research 9, 83-84.**

Kirby, H. y Cesario, F. (1976) A further comment on Cesario`s note on trip distribution. **Transportation Research 8, 215.**

Llanos, A. (2003) **Análisis crítico de un resultado paradójico del modelo de distribución de viajes de máxima entropía** Memoria de Título Ingeniero Civil, Universidad de Chile.

Mideplan-Cipit-Fernández y de Cea Ingenieros Ltda. (1994) **Análisis y Re-calibración de los Modelos de Estras. Volumen V.** Mideplan, Santiago.

Murty, K. (1976) **Linear and combinatorial programming** Wiley, New York, Estados Unidos.

Norcliffe, A. (1975) Trip distributions without entropy. **Transportation Research 9, 81-82.**

Ortúzar, J. de D. y Willumsen, L. (1994) **Modeling transport.** John Wiley & Sons, Chichester.

Williams, I. (1976) A comparison of some calibration techniques for doubly constrained models with an exponential cost function. **Transportation Research.10, 91-104.**

Wilson, A. (1970) Advances and problems in distribution modeling. **Transportation Research. 4, 1-18.**

Wilson, A. (1987) **Mathematical methods in human geography and planning.** John Wiley & Sons, Chichester.